数理解析研究所講究録
990 巻 1997 年 125-134

二重指数関数型変数変換を用いた Sinc 関数近似

東大・工・物理工学　杉原正顯 (Masaaki Sugihara)

1. はじめに

実軸上で定義された関数 f に対して，**(打ち切られた)Sinc 関数近似式** はつぎのように定義される:

$$\sum_{j=-n}^{n} f(jh)\frac{\sin[(\pi/h)(x-jh)]}{(\pi/h)(x-jh)}. \tag{1.1}$$

ここで，h は刻み幅で，標本点数 $N=2n+1$ を与えたとき，近似誤差が小さくなるように選ばれる.

この Sinc 関数近似の理論は，Whittaker [7] に始まり，近年，Stenger によって，その応用を含めて，広範囲にわたって研究が行われた．1993 年に出版された Stenger の著書 [5] はその集大成であり，研究の現状を知るのに有用である.

本稿では Stenger の研究した Sinc 関数近似理論を究極まで推し進めた二重指数関数型変数変換を用いた Sinc 関数近似理論，とくに，二重指数関数型変数変換を用いた Sinc 関数近似の「最適性」(より正確には究極性といった方がよいかもしれない) を示す.

「最適性」を示す手順は以下の通りである：

[手順 1]　減衰度を指定された関数の空間を導入する；

[手順 2]　[手順 1]で導入された各空間－より具体的には一重指数関数型減衰，二重指数関数型減衰する関数の空間－で Sinc 関数近似が (準) 最適であることを示す；

[手順 3]　減衰度がある限界を越えると (大雑把には二重指数関数型減衰以上になると)，そのような関数の空間が考えられなくなることを示す.

斯くして，二重指数関数型変数変換を用いた Sinc 関数近似の「最適性」(究極性) が結論される．以下，上記の [手順 1], [手順 2], [手順 3]について詳細に述べる.

2. 減衰度を指定された関数の空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ の導入 ([手順 1])

減衰度を指定された関数の空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ を導入する．この関数空間は [6] において，数値積分公式，とくに二重指数関数型数値積分公式の最適性に関する研究上で導入されたものである.

定義 1　正の実数 d に対して $\mathcal{D}_d$ を実軸まわりの幅 $2d$ の帯状領域とする：

$$\mathcal{D}_d=\{z\in\mathbf{C}\mid |\mathrm{Im}z|<d\}.$$

そして，$\omega(z)$ を $\mathcal{D}_d$上で零にならない正則関数として，$\omega(z)$ に関して有界な関数の全体を $H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ と書く：

$$H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)=\{f(z)\mid f(z)\text{ は }\mathcal{D}_d\text{ で正則で }\sup_{z\in\mathcal{D}_d}|f(z)/\omega(z)|<+\infty\text{ となるもの }\}.$$

ここで，関数空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ のノルムは

$$\|f\|\equiv\sup_{z\in\mathcal{D}_d}|f(z)/\omega(z)|$$

で定義する． □

空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ におけるノルムの定義より，

$$|f(z)| \le \|f\|\,|\omega(z)| \quad (z \in \mathcal{D}_d). \tag{1.2}$$

この不等式は $f \in H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ が $\mathcal{D}_d$において$\omega(z)$ と同様に振る舞うことを意味している．例えば，一重指数関数的に減衰する$\omega(z)$ に対して，関数 $f \in H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ は一重指数関数的に減衰し，二重指数関数的に減衰する$\omega(z)$ に対して，関数 $f \in H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ は二重指数関数的に減衰する．空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ はωによって減衰度が指定された関数の空間である．

ω の例としてはつぎのようなものが考えられる：

1. 一重指数関数的に減衰する場合:

$$\mathrm{sech}^\mu(z) \quad (\mu > 0), \quad \exp(-z^{2p}) \quad (p: \text{自然数}); \tag{1.3}$$

2. 二重指数関数的に減衰する場合:

$$\mathrm{sech}^\mu\left(\frac{\pi}{2}\sinh(z)\right) \quad (\mu > 0), \quad \exp(-A\cosh(Bz)) \quad (A, B > 0). \tag{1.4}$$

3. 関数空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ における Sinc 関数近似の (準) 最適性 ([手順 2])

ここでは 2. で導入された関数空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ 上において Sinc 関数近似式が (準) 最適であることを示す．

まず，関数空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ における Sinc 近似式 (1.1) の誤差ノルムを $E_{N,h}^{\mathrm{Sinc}}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega))$ で表す：

$$E_{N,h}^{\mathrm{Sinc}}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)) = \sup_{\|f\|\le 1}\left\{\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|f(x) - \sum_{j=-n}^{n} f(jh)\frac{\sin[(\pi/h)(x-jh)]}{(\pi/h)(x-jh)}\right|\right\}.$$

つぎに，次の形の N-点近似式の族を考える：

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(a_j)\phi_{jk}(x),$$

ここで $a_j \in \mathcal{D}_d$(ここで a_j は相異なるとする), $\phi_{jk}(z)$ は $\mathcal{D}_d$において正則な関数, $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_l$とする．そして，$N$-点近似式族に対する誤差ノルムの下限を $E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega))$ で表す：

$$\begin{aligned} &E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)) \\ &= \inf_{1\le l\le N}\ \inf_{\substack{m_1,m_2,\cdots,m_l \\ m_1+m_2+\cdots+m_l=N}}\ \inf_{\substack{a_j\in\mathcal{D}_d \\ \text{distinct}}}\ \inf_{\phi_{jk}}\left\{\sup_{\|f\|\le 1}\left\{\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|f(x) - \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(a_j)\phi_{jk}(x)\right|\right\}\right\}. \end{aligned}$$

つぎに Stenger [3], [4] にしたがって関数族 $B(\mathcal{D}_d)$ を定義する．この関数族は Sinc 関数近似の誤差を評価するためには不可欠なものである．

定義 2 $B(\mathcal{D}_d)$ を次の 2 条件を満足する $\mathcal{D}_d$ における正則関数の全体とする．

[条件 1] $\int_{-d}^{d} |f(x+iy)|dy \to 0, \quad x \to \pm\infty;$

[条件 2] $\mathcal{N}(f, \mathcal{D}_d) \equiv \lim_{y \to d-0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)| + |f(x-iy)|dx < \infty.$ □

次の定理 I，II が空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ における Sinc 関数近似の (準) 最適性を示す．つまり，空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ において

$$E_{N,h}^{\mathrm{Sinc}}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)) \approx E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega))$$

が成立することを示す．ただし，Sinc 関数近似における刻み幅 h は与えられた標本点数 N に対して近似誤差が小さくなるように適切にとられているものとする．定理 I は$\omega(z)$ が一重指数関数型減衰する場合，つまり，被近似関数が一重指数関数型減衰する場合の結果であり，定理 II は$\omega(z)$ が二重指数関数型減衰する場合，つまり，被近似関数が二重指数関数型減衰する場合の結果である．なお，証明は複雑であるので付録に与える．

定理 I 関数 $\omega(z)$ が次の条件を満足するとする:

1. $\omega(z) \in B(\mathcal{D}_d)$，かつ，$\omega(z)$ は $\mathcal{D}_d$において零となることはない；
2. 減衰条件—一重指数関数型減衰—

$$\alpha_1 \exp(-(\beta|x|)^\rho) \le |\omega(x)| \le \alpha_2 \exp(-(\beta|x|)^\rho) \quad -\infty < x < \infty,$$

ここで $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ は正数, ρ は 1 以上の正数である.

このとき，$H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ において次が成立する：

(I-1) $$E_{N,h}^{\mathrm{Sinc}}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)) \le CN^{\frac{\rho}{\rho+1}} \exp\left(-\left(\frac{\pi d\beta N}{2}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right),$$

ここで $N = 2n+1$ であり, h は $h = (\pi d)^{1/(\rho+1)}(\beta n)^{-\rho/(\rho+1)}$ととる;

(I-2) $$E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)) \ge C' \exp\left(-\left(\left(\frac{2}{\rho+1}\right)^\rho \pi d\beta N\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right).$$ □

定理 II 関数 $\omega(z)$ が次の条件を満足するとする:

1. $\omega(z) \in B(\mathcal{D}_d)$，かつ，$\omega(z)$ は $\mathcal{D}_d$において零となることはない；
2. 減衰条件—二重指数関数型減衰—

$$\alpha_1 \exp(-\beta_1 \exp(\gamma|x|)) \le |\omega(x)| \le \alpha_2 \exp(-\beta_2 \exp(\gamma|x|)) \quad -\infty < x < \infty,$$

ここで $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ は正数である.

このとき，$H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ において次が成立する：

(II-1) $$E_{N,h}^{\mathrm{Sinc}}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)) \le C \exp\left(-\frac{\pi d\gamma N}{2\log(\pi d\gamma N/2\beta_2)}\right),$$

ここで $N=2n+1$ であり, h は $h=\log(\pi d\gamma n/\beta_2)/(\gamma n)$ ととる;

$$\text{(II-2)} \qquad E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)) \geq C' \exp\left(-\frac{\pi d\gamma N}{\log(\pi d\gamma N/(2\beta_1))}\right). \qquad \square$$

4. 二重指数関数型減衰によって特徴付けられる関数空間の究極性 ([手順 3])

ここでは, 定理 II で扱った二重指数関数型減衰によって特徴付けられる関数空間が究極のものであることを示す. 証明については [6] を参照のこと.

定理 III 次の 2 条件を満足する関数 $\omega(z)$ は存在しない.

1. $\omega(z) \in B(\mathcal{D}_d)$, かつ, $\omega(z)$ は $\mathcal{D}_d$において零となることはない;
2. 減衰条件

$$\omega(x) = \mathrm{O}\left(\exp(-\beta\exp(\gamma|x|))\right) \quad \text{as } |x| \to \infty,$$

ここで $\beta>0$ かつ $\underline{\gamma > \pi/(2d)}$ とする. $\square$

参考文献

[1] Andersson, J.-E. (1980): Optimal quadrature of H^p functions, *Math. Z.* **172**, 55–62.

[2] Newman, D. J. (1979): Quadrature formulae for H^p functions, *Math. Z.* **166**, 111–115.

[3] Stenger, F. (1978): Optimal convergence of minimum norm approximations in H_p, *Numer. Math.* **29**, 345–362.

[4] Stenger, F. (1981): Numerical methods based on Whittaker cardinal or Sinc functions, *SIAM Rev.* **23**, 165–224.

[5] Stenger, F. (1993): *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[6] Sugihara, M. (1997): Optimality of the double exponential formula — functional analysis approach —, to appear in *Numerische Mathematik.*

[7] Whittaker, E. T. (1915): On the functions which are represented by the expansion of the interpolation theory, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **35**, 181–194.

付録: 定理 I, II の証明

A.1 Sinc 関数近似誤差の上からの評価 (I-1), (II-1) の証明

初めに, 刻み幅 h と分点数 n が与えられたときの Sinc 関数近似の誤差を上から評価する.

補題 A.1 1. 関数$\omega(z)$ が定理 I の条件をすべて満足するとする. このとき, 任意の $h>0$ に対して, 次の評価が成立する:

$$\text{(A.1)} \qquad E_{N,h}^{\mathrm{Sinc}}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)) \leq \frac{\exp(-\pi d/h)}{\pi d(1-\exp(-2\pi d/h))}\mathcal{N}(\omega,\mathcal{D}_d) + \frac{2\alpha_2\exp(-(\beta h n)^\rho)}{\rho(\beta h)^\rho n^{\rho-1}}.$$

2. 関数$\omega(z)$ が定理 II の条件をすべて満足するとする．このとき，任意の $h>0$ に対して，次の評価が成立する：

$$\text{(A.2)}\quad E_{N,h}^{\mathrm{Sinc}}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)) \le \frac{\exp(-\pi d/h)}{\pi d(1-\exp(-2\pi d/h))}\mathcal{N}(\omega,\mathcal{D}_d) + \frac{2\alpha_2\exp(-\beta_2\exp(\gamma hn))}{\beta_2\gamma h\exp(\gamma hn)}.$$

□

[補題 A.1 の証明]　つぎの補題が必要である：

補題 A.2　関数$\omega(z)$ が定理 I(もしくは定理 II) の条件 1 を満足するとする．このとき，任意の $h>0$ に対して，次の評価が成立する：

$$\text{(A.3)}\qquad E_{N,h}^{\mathrm{Sinc}}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)) \le \frac{\exp(-\pi d/h)}{\pi d(1-\exp(-2\pi d/h))}\mathcal{N}(\omega,\mathcal{D}_d) + \sum_{|j|>n}|\omega(jh)|.$$

□

[補題 A.2 の証明]　不等式 (1.2) および $\omega(z)$ に対する条件，つまり$\omega(z)\in B(\mathcal{D}_d)$ より，$f(z)\in H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ は $B(\mathcal{D}_d)$ に含まれることが分かる．一方 $f(z)\in B(\mathcal{D}_d)$ に対して次の誤差評価が成り立つことは良く知られている (Stenger [3], [4]):

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|f(x)-\sum_{j=-n}^{n}f(jh)S(j,h)(x)\right| &\le \sup_{x\in\mathbf{R}}\left|f(x)-\sum_{j=-\infty}^{\infty}f(jh)S(j,h)(x)\right| + \sum_{|j|>n}|f(jh)|\\ &\le \frac{\exp(-\pi d/h)}{\pi d(1-\exp(-2\pi d/h))}\mathcal{N}(f,\mathcal{D}_d) + \sum_{|j|>n}|f(jh)|.\end{aligned}$$

ここで，不等式 (1.2) から導かれる

$$|f(jh)|\le \|f\|\,|\omega(jh)|,\quad \mathcal{N}(f,\mathcal{D}_d)\le\|f\|\mathcal{N}(\omega,\mathcal{D}_d)$$

を代入すれば証明すべき評価式を得る．　[補題 A.2 の証明終わり]

(補題 A.1 の証明続き)　関数$\omega(z)$ に対する定理 I (もしくは定理 II) の条件 2(減衰条件) の下に (A.3) の右辺第 2 項は次のように評価されることが分かる．

定理 I の場合:

$$\begin{aligned}\sum_{|j|>n}|\omega(jh)| &\le 2\alpha_2\sum_{j=n+1}^{\infty}\exp(-(\beta jh)^\rho)\\ &\le 2\alpha_2\int_n^\infty \exp(-(\beta hx)^\rho)dx\\ &\le \frac{2\alpha_2}{\rho(\beta h)^\rho n^{\rho-1}}\int_n^\infty \rho(\beta h)^\rho x^{\rho-1}\exp(-(\beta hx)^\rho)dx\\ &= \frac{2\alpha_2\exp(-(\beta hn)^\rho)}{\rho(\beta h)^\rho n^{\rho-1}};\end{aligned}$$

定理 II の場合:

$$\sum_{|j|>n}|\omega(jh)| \le 2\alpha_2\sum_{j=n+1}^{\infty}\exp(-\beta_2\exp(\gamma jh))$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2\alpha_2 \int_n^\infty \exp(-\beta_2 \exp(\gamma h x))dx \\
&\le \frac{2\alpha_2}{\beta_2\gamma h \exp(\gamma h n)} \int_n^\infty \beta_2\gamma h \exp(\gamma h x)\exp(-\beta_2\exp(\gamma h x))dx \\
&= \frac{2\alpha_2 \exp(-\beta_2\exp(\gamma h n))}{\beta_2\gamma h\exp(\gamma h n)}.
\end{aligned}
$$

これらの評価を (A.3) に代入して (A.1) および (A.2) を得る． [補題 A.1 の証明終わり]

定理 I, II における評価 (I-1), (II-1) を証明するためには，与えられた n に対して刻み幅 h を近似誤差が小さくなるように適切に選び，その h に対して $E_{N,h}^{\mathrm{Sinc}}$ を評価すればよい．

定理 I の場合: 明らかに，刻み幅 h は (A.1) の右辺の第 1 項と第 2 項の大きさが等しくなるように選べばよい．つまり，刻み幅 h は方程式

$$
\exp(-\pi d/h) = \exp(-(\beta h n)^\rho) \tag{A.4}
$$

が成り立つように選べばよい．ここで，実際にこの方程式を解いて

$$
h = (\pi d)^{\frac{1}{\rho+1}}(\beta n)^{-\frac{\rho}{\rho+1}}
$$

を得る．この刻み幅 h に対して (A.1) の右辺の第 1 項と第 2 項を評価すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\exp(-\pi d/h)}{\pi d(1-\exp(-2\pi d/h))}\mathcal{N}(\omega,\mathcal{D}_d) &\le C_1 \exp\left(-(\pi d\beta n)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right) \\
&\le C_1' \exp\left(-\left(\frac{\pi d\beta N}{2}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right), \\
\frac{2\alpha_2\exp(-(\beta h n)^\rho)}{\rho(\beta h)^\rho n^{\rho-1}} &\le C_2 n^{\frac{\rho}{\rho+1}} \exp\left(-(\pi d\beta n)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right) \\
&\le C_2' N^{\frac{\rho}{\rho+1}} \exp\left(-\left(\frac{\pi d\beta N}{2}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right)
\end{aligned}
$$

を得る．これらの評価から (I-1), つまり定理 I における $E_{N,h}^{\mathrm{Sinc}}$ に対する上からの評価が得られる．

定理 II の場合: 定理 I の場合と同様にして刻み幅 h に関する方程式

$$
\exp(-\pi d/h) = \exp(-\beta_2\exp(\gamma h n)) \tag{A.5}
$$

が導かれる．実際にこの方程式を解いて

$$
h = \frac{\log(\pi d\gamma n/\beta_2)}{\gamma n} + \mathrm{O}\left(\frac{\log\log(\pi d\gamma n/\beta_2)}{\gamma n}\right) \qquad (n\to\infty)
$$

を得る．ここで，刻み幅 h として上記の漸近展開の主要項をとる：

$$
h = \frac{\log(\pi d\gamma n/\beta_2)}{\gamma n}.
$$

この刻み幅 h に対して (A.2) の右辺の第 1 項と第 2 項を評価すると

$$
\frac{\exp(-\pi d/h)}{\pi d(1-\exp(-2\pi d/h))}\mathcal{N}(\omega,\mathcal{D}_d) \le C_3 \exp\left(-\frac{\pi d\gamma n}{\log(\pi d\gamma n/\beta_2)}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \quad C_3' \exp\left(-\frac{\pi d\gamma N}{2\log(\pi d\gamma N/(2\beta_2))}\right), \\
\frac{2\alpha_2 \exp(-\beta_2 \exp(\gamma h n))}{\beta_2 \gamma h \exp(\gamma h n)} \quad &= \quad \frac{2\alpha_2 \exp(-\pi d\gamma n)}{\pi d\gamma \log(\pi d\gamma n/\beta_2)} \\
&\le \quad C_4 \frac{\exp(-\pi d\gamma N/2)}{\log N}
\end{aligned}
$$

を得る．これらの評価から (II-1), つまり定理 II における $E_{N,h}^{\mathrm{Sinc}}$ に対する上からの評価が得られる．以上で Sinc 関数近似誤差の上からの評価 (I-1), (II-1) の証明を終わる．

A.2　関数近似誤差の下限の評価 (I-2), (II-2) の証明

複素数ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_N)$ (ただし $a_j \in \mathcal{D}_d$) に対して，$z \in \mathbf{C}$ の関数 $B_N(z; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)$ をつぎのように定義する：

$$B_N(z; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d) = \prod_{i=1}^{N} \frac{T(z) - T(a_i)}{1 - \overline{T(a_i)}T(z)}.$$

ここで

$$T(z) = \tanh\left(\frac{\pi}{4d} z\right)$$

である．この $B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)$ を，[6]にしたがって変換された Blaschke 積とよぶことにする．

まず，この変換された Blaschke 積を用いて，関数近似誤差の下限 $E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$ を見やすい形に表現する：

補題 A.3　関数 $\omega(z)$ が定理 I(もしくは定理 II) の条件 1 を満足するとする．このとき

$$E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) = \inf_{a_i \in \mathbf{R}} \left\{ \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)| \right\} \tag{A.6}$$

が成り立つ．　□

[補題 A.3 の証明] 不等式

$$E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \le \inf_{a_i \in \mathbf{R}} \left\{ \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)| \right\}, \tag{A.7}$$

および逆向きの不等式

$$E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \ge \inf_{a_i \in \mathbf{R}} \left\{ \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)| \right\} \tag{A.8}$$

を証明する．

まず初めに，不等式 (A.7) をつぎの一連の不等式を示すことにより証明する:

$$
\begin{aligned}
E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \quad &\le \quad \inf_{\substack{a_j \in \mathbf{R} \\ \text{distinct}}} \inf_{\phi_j} \left[\sup_{\|f\| \le 1} \left\{ \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| f(x) - \sum_{j=1}^{N} f(a_j)\phi_j(x) \right| \right\} \right] \\
&\le \quad \inf_{\substack{a_j \in \mathbf{R} \\ \text{distinct}}} \left[\sup_{\|f\| \le 1} \left\{ \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| f(x) - \sum_{j=1}^{N} f(a_j) \frac{B_{N;j}(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)}{B_{N;j}(a_j; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(a_j)} T'(a_j - x) \right| \right\} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \inf_{\substack{a_j \in \mathbf{R} \\ \text{distinct}}} \left\{ \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)| \right\} \\
&= \inf_{a_j \in \mathbf{R}} \left\{ \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)| \right\},
\end{aligned}
$$

ここで, 第 2 の不等式の右辺において,

$$
B_{N;j}(z; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{T(z) - T(a_i)}{1 - \overline{T(a_i)}T(z)}
$$

である.

まず, 第 1, 第 2 の不等式は自明である. つぎに第 3 の不等式を示すために, $\delta (0 < \delta < d)$ および $a_j \in \mathbf{R}$ (a_jは相異なる) に対して成り立つ等式

$$
f(x) - \sum_{j=1}^{N} f(a_j) \frac{B_{N;j}(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)}{B_{N;j}(a_j; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(a_j)} T'(a_j - x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}_\delta} f(\zeta) \frac{B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)}{B_N(\zeta; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(\zeta)} \frac{T'(\zeta - x)}{T(\zeta - x)}\, d\zeta
$$

に注意する. この等式は Cauchy の積分定理および $\omega(z)$ に対する条件 1 から容易に導くことができる. この等式を用いて, つぎのようにして示すべき第 3 の不等式が得られる:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| f(x) - \sum_{j=1}^{N} f(a_j) \frac{B_{N;j}(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)}{B_{N;j}(a_j; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(a_j)} T'(a_j - x) \right| \\
&\leq \varlimsup_{\delta \uparrow d} \left\{ \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}_\delta} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)}{B_N(\zeta; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)} \frac{T'(\zeta - x)}{T(\zeta - x)}\, d\zeta \right| \right\} \\
&\leq \|f\| \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)| \\
&\qquad \times \varlimsup_{\delta \uparrow d} \left[\frac{1}{\inf_{\zeta \in \partial \mathcal{D}_\delta} |B_N(\zeta; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)|} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathcal{D}_\delta} \frac{|T'(\zeta - x)|}{|T(\zeta - x)|} |d\zeta| \right\} \right] \\
&= \|f\| \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)| \varlimsup_{\delta \uparrow d} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathcal{D}_\delta} \frac{|T'(\zeta)|}{|T(\zeta)|} |d\zeta| \\
&= \|f\| \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)| \varlimsup_{\delta \uparrow d} \frac{1}{2\pi} \int_{T(\partial \mathcal{D}_\delta)} \frac{1}{|z|} |dz| \\
&= \|f\| \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)|.
\end{aligned}
$$

最後の第 4 の不等式は $B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)$ が $\boldsymbol{a}$ の連続関数であることから従う.

つぎに, 逆向きの不等式 (A.8) を以下の一連の不等式を示すことによって証明する:

$$
\begin{aligned}
E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) &\geq \inf_{1 \leq l \leq N} \inf_{\substack{m_1, m_2, \cdots, m_l \\ m_1 + m_2 + \cdots + m_l = N}} \inf_{\substack{a_j \in \mathcal{D}_d \\ \text{distinct}}} \inf_{\phi_{jk}} \left[\sup_{f \in \boldsymbol{F}_0(\{a_j\}, \{m_j\})} \left\{ \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)| \right\} \right] \\
&\geq \inf_{a_i \in \mathcal{D}_d} \left\{ \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)| \right\} \\
&= \inf_{a_i \in \mathbf{R}} \left\{ \sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \boldsymbol{a}, \mathcal{D}_d)\omega(x)| \right\},
\end{aligned}
$$

ここで, 第1の不等式の右辺において, $\boldsymbol{F}_0(\{a_j\}, \{m_j\})$ はつぎのように定義される $H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)$ の部分集合である：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_0(\{a_j\}, \{m_j\}) \\
&\quad = \{f \in H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega) \mid \|f\| \le 1 \text{ and } f^{(k)}(a_j) = 0, k = 0,\cdots,m_j-1, j=1,\cdots,l\}.
\end{aligned}
$$

まず第1の不等式は自明である．第2の不等式は，$\boldsymbol{a} = (a_1,\cdots,a_1,\cdots,a_l,\cdots,a_l)$ (ここで a_j は m_j 回繰り返されているものとする) に対して $B_N(z;\boldsymbol{a},\mathcal{D}_d)$ が $\boldsymbol{F}_0(\{a_j\},\{m_j\})$ に含まれることより明らかである．第3の不等式も，直接計算で示される不等式

$$
\left|\frac{\xi-\alpha}{1-\alpha\xi}\right| \ge \left|\frac{\xi-\mathrm{Re}\,\alpha}{1-(\mathrm{Re}\,\alpha)\xi}\right| \qquad (-1<\xi<1, |\alpha|<1)
$$

より，その成立は明らかである． [補題 A.3 の証明終わり]

上記の補題 A.3 により，誤差の下からの評価のための鍵となるつぎの補題が容易に導かれる.

補題 A.4 関数$\omega(z)$ が定理I(もしくは定理II) の条件 1 を満足するとする．このとき

$$
E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega)) \ge \sup_{R\in\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{\pi dN}{2R} + \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}\log|\omega(x)|\,dx\right) \tag{A.9}
$$

が成り立つ. □

[補題 A.4 の証明] まず，(A.6) の右辺はつぎのように下から評価される：

$$
\inf_{a_i\in\mathbf{R}}\left\{\sup_{x\in\mathbf{R}}|B_N(x;\boldsymbol{a},\mathcal{D}_d)\omega(x)|\right\} \ge \inf_{a_i\in\mathbf{R}}\left\{\sup_{R\in\mathbf{R}}\int_{-R}^{R}|B_N(x;\boldsymbol{a},\mathcal{D}_d)\omega(x)|\,\frac{dx}{2R}\right\}. \tag{A.10}
$$

ここで，[1], [6]において用いられた手法，つまり，Jensen の不等式，および Newman の不等式[2]：

$$
\int_{-\rho}^{\rho}\log\left|\frac{\xi-\alpha}{1-\overline{\alpha}\xi}\right|\frac{d\xi}{1-\xi^2} \ge -\frac{\pi^2}{4} \quad (0\le\rho\le 1,\ |\alpha|<1)
$$

を用いると，(A.10) の右辺の積分は

$$
\begin{aligned}
&\int_{-R}^{R}|B_N(x;\boldsymbol{a},\mathcal{D}_d)\omega(x)|\,\frac{dx}{2R} \\
&\quad \ge \exp\left\{\int_{-R}^{R}\log(|B_N(x;\boldsymbol{a},\mathcal{D}_d)||\omega(x)|)\,\frac{dx}{2R}\right\} \\
&\quad = \exp\left[\frac{d}{\pi R}\int_{-T(R)}^{T(R)}\log\prod_{i=1}^{N}\left|\frac{\xi-T(a_i)}{1-\overline{T(a_i)}\xi}\right|\frac{d\xi}{1-\xi^2} + \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}\log|\omega(x)|\,dx\right] \\
&\quad \ge \exp\left(-\frac{\pi dN}{2R} + \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}\log|\omega(x)|\,dx\right)
\end{aligned}
$$

と評価される．この結果を (A.10) の右辺に代入して，証明すべき $E_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d,\omega))$ に対する評価が得られる. [補題 A.4 の証明終わり]

あとは，つまり関数近似誤差の下限の評価 (I-2), (II-2) の証明のためには，(A.9) の右辺項を定理 I の条件 2 および定理 II の条件 2 を加味して評価すればよい.

補題 A.5 1. 関数 $\omega(z)$ が定理 I の条件をすべて満足するとする．このとき次の評価が成立する:

$$\begin{aligned}\sup_{R\in\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{\pi dN}{2R} + \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \log|\omega(x)|\,dx\right) &\geq \sup_{R\in\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{\pi dN}{2R} + \log\alpha_1 - \frac{(\beta R)^\rho}{\rho+1}\right) \\ &\geq C' \exp\left(-\left(\left(\frac{2}{\rho+1}\right)^{1/\rho} \pi d\beta N\right)^{\rho/(\rho+1)}\right).\end{aligned}$$

2. 関数 $\omega(z)$ が定理 II の条件をすべて満足するとする．このとき次の評価が成立する:

$$\begin{aligned}\sup_{R\in\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{\pi dN}{2R} + \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \log|\omega(x)|\,dx\right) &\geq \sup_{R\in\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{\pi dN}{2R} + \log\alpha_1 - \frac{\beta_1(\exp(\gamma R)-1)}{\gamma R}\right) \\ &\geq C' \exp\left(-\frac{\pi d\gamma N}{\log(\pi d\gamma N/(2\beta_1))}\right).\end{aligned}$$

□

[補題 A.5 の証明] 1.，2. ともに，第 1 の不等式はω に対する減衰条件より簡単に導かれる．また，第 2 の不等式は，第 1 の不等式の右辺の関数において，R をそれぞれ

$$R = \left(\frac{(\rho+1)\pi dN}{2\beta^\rho}\right)^{1/(\rho+1)}$$

および

$$R = \frac{1}{\gamma}\log\left(\frac{\pi d\gamma N}{2\beta_1}\right)$$

ととればよい． [補題 A.5 の証明終わり]